

MODEL SIR UNTUK PENYEBARAN PENYAKIT FLU BURUNG

MANSYUR, A. R.¹, TOAHA, S.², KHAERUDDIN³

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Jln. Perintis Kemerdekaan Km. 10 Makassar 90245, Indonesia

ABSTRAK

Model SIR untuk penyebaran penyakit flu burung merupakan model matematika yang menjelaskan interaksi antara kelompok populasi burung *susceptible* (S_b) dan *infected* (I_b) dengan kelompok populasi manusia *susceptible* (S_h), *infected* (I_h), dan *recovered* (R_h). Titik keseimbangan model meliputi titik keseimbangan bebas penyakit (E) dan titik keseimbangan endemik (E^+). Dari analisis kestabilan diperoleh bahwa kestabilan titik keseimbangan bergantung pada bilangan reproduksi dasar (R_0). Titik keseimbangan E stabil jika $R_0 < 1$ sedangkan titik keseimbangan E^+ stabil jika $R_0 > 1$. Simulasi numerik diberikan untuk melihat trayektori populasi di sekitar titik keseimbangan.

Kata Kunci : Titik keseimbangan, kestabilan, bilangan reproduksi dasar.

1. Pendahuluan

Di Indonesia terdapat banyak peternak yang memelihara unggas. Ada yang membuat kandang unggas dalam pekarangan rumah ada juga yang di luar, di tempat yang disediakan khusus. Kandang unggas dalam pekarangan rumah menyebabkan interaksi antara unggas dan pemiliknya menjadi sangat tinggi sedangkan unggas yang dikandangkan di luar rumah interaksinya lebih rendah dengan manusia.

Flu burung yang menyerang unggas menyebabkan penyakit ini menjadi sangat rawan di Indonesia, terlebih diketahui virus ini juga menyerang manusia. Penularannya dapat melalui udara ataupun kontak melalui makanan, minuman, dan sentuhan yang disebabkan oleh virus influenza tipe A dengan sub tipe H5N1, [4]. Virus tipe A memiliki banyak subjenis selain H5N1 ada juga H1N1, H3N2, H7N7, dan beberapa jenis lainnya. Jenis yang terkenal dan sempat menimbulkan kepanikan di seluruh dunia adalah H1N1 yang dikenal dengan flu babi serta H5N1 atau flu burung, [3].

Tulisan ini bertujuan untuk menentukan titik keseimbangan dan bilangan reproduksi dasar (*basic reproduction number*) serta melakukan simulasi numerik untuk melihat dinamika penyebaran penyakit flu burung pada manusia dan pada burung.

2. Tinjauan Pustaka

2.1 Flu Burung

Flu burung yang dikenal dengan istilah *avian flu* atau *avian influenza* (AI) adalah penyakit menular yang disebabkan oleh virus influenza tipe A dengan diameter 90-120 nanometer. Secara normal virus tersebut hanya menginfeksi ternak unggas seperti ayam, kalkun, dan itik. Namun data terakhir menunjukkan bahwa virus AI bisa menginfeksi ternak ruminansia terutama babi. Walaupun hampir semua jenis unggas dapat terinfeksi virus yang terkenal sangat ganas ini tetapi yang diketahui jauh lebih rentan adalah jenis unggas yang ditanakkan secara massal seperti ayam, puyuh, dan itik, [2].

2.2 Model Epidemiologi

Model epidemiologi pada umumnya berfokus pada dinamika dari transisi atau perpindahan karakter antara individu dengan individu, populasi dengan populasi, komunitas dengan komunitas, daerah dengan daerah, bahkan negara dengan negara. Karakter tersebut dapat berbentuk penyakit (malaria, *tuberculosis*, HIV, dan flu burung), karakteristik genetik (gender, ras, dan penyakit genetik) dan bentuk lain seperti kultur (bahasa dan kepercayaan), [4].

Salah satu istilah dalam model epidemiologi adalah epidemik. Epidemik merupakan sebuah fenomena dimana sebuah penyakit tiba-tiba muncul dalam suatu populasi dan menjangkit secara cepat sebelum penyakit tersebut menghilang dan kemudian muncul kembali dalam interval waktu tertentu. Selain epidemik juga dikenal istilah lain yaitu endemik. Endemik merupakan sebuah fenomena dimana suatu penyakit yang muncul akan selalu ada dalam suatu populasi, [10].

2.3 Titik Keseimbangan Sistem

Titik keseimbangan adalah sebuah keadaan dari suatu sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Jika sistem dinamika diuraikan dalam persamaan diferensial, maka titik keseimbangan dapat diperoleh dengan mengambil turunan pertama yang sama dengan nol, [6].

Definisi 2.1 [6]

Titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik keseimbangan (*equilibrium point*) dari $\dot{x} = f(x)$ jika memenuhi $f(\bar{x}) = 0$, dimana

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Dalam sistem epidemiologi dikenal titik keseimbangan bebas penyakit (*Disease-Free Equilibrium* atau *DFE*) dan titik keseimbangan endemik (*Endemic Equilibrium* atau *EE*). Titik keseimbangan bebas penyakit adalah suatu kondisi dimana sudah tidak ada lagi penyakit yang menyerang. Titik keseimbangan endemik adalah suatu kondisi dimana penyakit selalu ada dalam populasi, [8].

2.5 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Tinjau sistem PD non-linear orde n , sebagai berikut

$$\dot{x}_i = Ax + f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.1)$$

dimana $i = 1, 2, \dots, n$.

Langkah awal penyelesaian persamaan (2.1) yakni dengan mencari titik keseimbangan. Misalkan titik keseimbangan yang diperoleh adalah $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, maka langkah selanjutnya mencari matriks Jacobinya.

Misalkan $G_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = Ax + f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka matriks Jacobinya adalah

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya substitusi titik keseimbangan pada matriks Jacobi, maka diperoleh sistem yang linear sebagai berikut, [1]

$$\dot{u}_i = A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)u.$$

Penentuan kestabilan titik keseimbangan didapat dengan memperhatikan nilai-nilai eigennya, yaitu λ yang diperoleh dari

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Secara umum kestabilan suatu titik keseimbangan mempunyai 2 perilaku, yaitu

1. Stabil, jika
 - a) $Re(\lambda_i) < 0$ untuk setiap i , atau
 - b) Terdapat $Re(\lambda_j) = 0$ untuk sebarang j dan $Re(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i \neq j$.
2. Tidak stabil, jika terdapat paling sedikit satu i sehingga $Re(\lambda_i) > 0$, [9].

2.5 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar adalah jumlah rata-rata individu infeksi sekunder akibat tertular individu infeksi primer yang berlangsung di dalam populasi *susceptible*.

Secara umum bilangan R_0 mempunyai tiga kemungkinan yaitu

1. Jika $R_0 < 1$ maka penyakit akan menghilang.
2. Jika $R_0 = 1$ maka penyakit akan menetap (endemis).
3. Jika $R_0 > 1$ maka penyakit akan meningkat menjadi wabah, [5].

2.6 Model Dasar Penyebaran Penyakit Flu Burung

Model yang dimaksud adalah

$$\frac{dX}{dt} = c - bX - \omega XY$$

$$\frac{dY}{dt} = \omega XY - (b + m)Y$$

$$\frac{dS}{dt} = \lambda - \mu S - (\beta_1 Y + \beta_2 H)S$$

$$\frac{dB}{dt} = \beta_1 SY - (\mu + d + \varepsilon)B$$

$$\frac{dH}{dt} = \beta_2 SY + \varepsilon B - (\mu + \alpha + \gamma)H$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma H - \mu R$$

dengan

- X : Jumlah burung *susceptible* pada saat t .
 Y : Jumlah burung *infected* pada saat t .
 S : Jumlah manusia *susceptible* pada saat t .
 B : Jumlah manusia *infected* pada saat t .
 H : Jumlah manusia *mutant* pada saat t .
 R : Jumlah manusia *recovered* pada saat t .
 c : Pertambahan burung *susceptible* setiap satuan waktu.
 b : Laju kematian alami burung *susceptible* atau burung *infected*.

- ω : Laju interaksi burung *susceptible* dengan burung *infected* yang dapat mengakibatkan penularan penyakit flu burung.
- m : Laju kematian burung *infected* karena penyakit flu burung.
- λ : Pertambahan manusia *susceptible* setiap satuan waktu.
- μ : Laju kematian alami manusia *susceptible*, manusia *infected*, manusia *exposed*, atau manusia *recovered*.
- β_1 : Laju interaksi manusia *susceptible* dengan burung *infected* yang dapat mengakibatkan penularan penyakit flu burung.
- β_2 : Laju interaksi manusia *susceptible* dengan manusia *exposed* yang dapat mengakibatkan manusia *susceptible* menjadi manusia *exposed*.
- d : Laju kematian manusia *infected* karena penyakit flu burung.
- ε : Laju mutasi manusia *infected*.
- α : Laju kematian manusia *mutant* karena penyakit flu burung.
- γ : Laju kekebalan manusia *mutant*, [7].

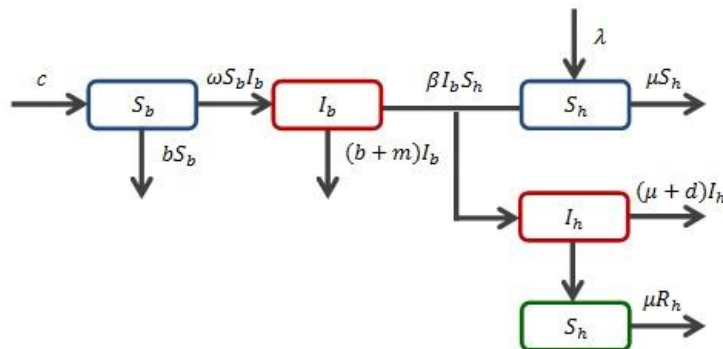
3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Model Epidemiologi Penyakit Flu Burung

Penyebaran flu burung pada populasi burung dibagi menjadi dua kelompok. Pertama adalah populasi yang sehat namun rentan terhadap penyakit yang disebut *susceptible*. Kedua adalah populasi yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit ke populasi lainnya yang disebut *infected*. Jumlah burung yang *susceptible* dinyatakan dengan S_b sedangkan jumlah burung yang *infected* dinyatakan dengan I_b sehingga jumlah burung dalam suatu populasi adalah $S_b + I_b = N_b$.

Penyebaran flu burung pada populasi manusia dibagi menjadi tiga kelompok. Pertama adalah populasi yang sehat namun rentan terhadap penyakit yang disebut *susceptible*. Kedua adalah populasi yang terinfeksi tetapi tidak dapat menginfeksi yang disebut *infected*, terlihat perbedaan antara burung yang *infected* dengan manusia yang *infected*, bahwa burung yang *infected* dapat menginfeksi populasi lainnya sedangkan manusia *infected* tidak. Kelompok populasi ketiga adalah populasi yang telah sembuh dari penyakit flu burung dan menjadi kebal sehingga tidak akan terinfeksi kembali oleh flu burung yang disebut *recovered*. Jumlah manusia yang *susceptible* dinyatakan dengan S_h , yang *infected* dinyatakan dengan I_h , sedangkan yang *recovered* dinyatakan dengan R_h , sehingga jumlah manusia dalam populasi adalah $S_h + I_h + R_h = N_h$.

Skema penyebaran penyakit flu burung dapat digambarkan dalam model kompartemen sebagai berikut:



Gambar 3.1 Diagram kompartemen model penyebaran penyakit flu burung.

Secara umum, model epidemiologi penyebaran penyakit flu burung dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS_b}{dt} &= c - bS_b - \omega S_b I_b \\ \frac{dI_b}{dt} &= \omega S_b I_b - (b + m)I_b \\ \frac{dS_h}{dt} &= \lambda - \mu S_h - \beta I_b S_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= \beta I_b S_h - (\varepsilon + d + \mu)I_h \\ \frac{dR_h}{dt} &= \varepsilon I_h - \mu R_h\end{aligned}\tag{3.1}$$

dengan

- S_b : Jumlah burung *susceptible* pada saat t .
- I_b : Jumlah burung *infected* pada saat t .
- S_h : Jumlah manusia *susceptible* pada saat t .
- I_h : Jumlah manusia *infected* pada saat t .
- R_h : Jumlah manusia *recovered* pada saat t .
- c : Pertambahan burung *susceptible* setiap satuan waktu.
- b : Laju kematian dan emigrasi burung *susceptible* dan *infected*.
- ω : Laju interaksi burung *susceptible* dengan burung *infected* yang dapat mengakibatkan penularan penyakit flu burung.
- m : Laju kematian burung *infected* yang disebabkan karena penyakit flu burung.
- λ : Pertambahan manusia *susceptible* setiap satuan waktu.
- μ : Laju kematian dan emigrasi manusia *susceptible*, *infected*, dan *recovered*.
- β : Laju interaksi manusia *susceptible* dengan burung *infected* yang dapat mengakibatkan penularan penyakit flu burung.
- ε : Laju manusia *infected* yang kemudian sembuh dari penyakit flu burung dan menjadi manusia *recovered*.

3.2 Analisis Kestabilan Model

3.2.1 Titik Keseimbangan

Sesuai definisi 2.1, maka sistem persamaan (3.1) menjadi

$$\frac{dS_b}{dt} = c - bS_b - \omega S_b I_b = 0\tag{3.2}$$

$$\frac{dI_b}{dt} = \omega S_b I_b - (b + m)I_b = 0\tag{3.3}$$

$$\frac{dS_h}{dt} = \lambda - \mu S_h - \beta I_b S_h = 0\tag{3.4}$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \beta I_b S_h - (\varepsilon + d + \mu)I_h = 0\tag{3.5}$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \varepsilon I_h - \mu R_h = 0\tag{3.6}$$

Diperoleh titik keseimbangan $E = (\frac{c}{b}, 0, \frac{\lambda}{\mu}, 0, 0)$ yang disebut titik keseimbangan bebas penyakit karena $I_b = 0$ dan $I_h = 0$ atau tidak mengandung individu yang *infected* baik burung maupun manusia.

Selanjutnya akan dicari titik keseimbangan yang lain, diperoleh

$$E^+ = \left(\frac{(b+m)}{\omega}, -\frac{b^2+bm-c\omega}{\omega(b+m)}, \frac{\lambda\omega(b+m)}{\beta(b^2+bm-c\omega)\lambda}, \frac{(-\mu\omega(b+m)-\beta(-b^2-bm+c\omega))(\varepsilon+d+\mu)}{\varepsilon\beta(b^2+bm-c\omega)\lambda}, \frac{\mu(-\mu\omega(b+m)-\beta(-b^2-bm+c\omega))(\varepsilon+d+\mu)}{\mu(-\mu\omega(b+m)-\beta(-b^2-bm+c\omega))(\varepsilon+d+\mu)} \right)$$

Jika titik keseimbangan E^+ adalah titik keseimbangan endemik maka harus dibuktikan bahwa $S_b > 0$, $I_b > 0$, $S_h > 0$, $I_h > 0$, dan $R_h > 0$, dalam hal ini terdapat populasi burung *susceptible*, burung *infected*, manusia *susceptible*, manusia *infected*, dan manusia *recovered*.

Karena $S_b > 0$, $I_b > 0$, $S_h > 0$, $I_h > 0$, dan $R_h > 0$ dengan syarat $b^2 + bm - c\omega < 0$, maka terbukti titik keseimbangan E^+ adalah titik keseimbangan endemik.

3.2.2 Kestabilan Titik Keseimbangan

Akan dicari nilai eigen dari tiap-tiap titik keseimbangan untuk mengetahui kestabilan titik keseimbangan tersebut. Nilai eigen yaitu λ merupakan akar dari persamaan karakteristik yang dibentuk dari

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

dengan A adalah matriks Jacobi yang bersesuaian.

Misalkan

$$\begin{aligned} f &= c - bS_b - \omega S_b I_b, \\ g &= \omega S_b I_b - (b+m)I_b, \\ h &= \lambda - \mu S_h - \beta I_b S_h, \\ i &= \beta I_b S_h - (\varepsilon + d + \mu)I_h, \text{ dan} \\ j &= \varepsilon I_h - \mu R_h. \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibentuk matriks Jacobi dengan melakukan linearisasi menggunakan turunan parsial. Berikut adalah bentuk matriks Jacobi yang dimaksud

$$A = \begin{bmatrix} f_{S_b} & f_{I_b} & f_{S_h} & f_{I_h} & f_{R_h} \\ g_{S_b} & g_{I_b} & g_{S_h} & g_{I_h} & g_{R_h} \\ h_{S_b} & h_{I_b} & h_{S_h} & h_{I_h} & h_{R_h} \\ i_{S_b} & i_{I_b} & i_{S_h} & i_{I_h} & i_{R_h} \\ j_{S_b} & j_{I_b} & j_{S_h} & j_{I_h} & j_{R_h} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya evaluasi matriks Jacobi pada titik keseimbangan $E = \left(\frac{c}{b}, 0, \frac{\lambda}{\mu}, 0, 0 \right)$, diperoleh persamaan karakteristik

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |\lambda I - A| = (\lambda + b) \left(\lambda - \omega \frac{c}{b} - (b+m) \right) (\lambda + \mu) \\ &\quad (\lambda + (\varepsilon + d + \mu)) (\lambda + \mu) = 0 \end{aligned}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -b, \lambda_2 = \omega \frac{c}{b} - (b+m) = \frac{\omega c - b^2 - bm}{b}, \lambda_3 = -\mu, \\ \lambda_4 &= -(\varepsilon + d + \mu), \text{ dan } \lambda_5 = -\mu \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicek nilai dari masing-masing nilai eigen yang telah diperoleh.

Karena terdapat $\lambda_i > 0$ yaitu $\lambda_2 = \frac{\omega c - b^2 - bm}{b}$ maka titik keseimbangan $E = \left(\frac{c}{b}, 0, \frac{\lambda}{\mu}, 0, 0\right)$ tidak stabil.

Selanjutnya akan dicek kestabilan titik keseimbangan E^+ . Evaluasi matriks Jacobi pada titik keseimbangan, kemudian dibentuk persamaan karakteristik terkait

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - (-b - \omega A_1)) \left(\lambda - \left(\omega \left(\frac{b+m}{\omega} \right) - (b+m) \right) \right) \\ (\lambda + (\varepsilon + d + \mu))(\lambda + \mu)(-\omega A_1) \left(-\beta \frac{\lambda \omega (b+m)}{-\mu \omega (b+m) - \beta (c\omega - b^2 - bm)} \right) \\ (-\beta A_1)(-\varepsilon) - \left(\omega \left(\frac{b+m}{\omega} \right) \right) (-\omega A_1)$$

$$\text{dengan } A_1 = \frac{c\omega - b^2 - bm}{\omega(b+m)}.$$

Diperoleh

$$\lambda_1 = \frac{-\mu \omega b - \mu \omega m - \beta c \omega + \beta b^2 + \beta b m}{\omega(b+m)}, \lambda_2 = -\mu - d - \varepsilon, \lambda_3 = -\mu$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{-2(b+m)}(c\omega + B_1), \text{ dan } \lambda_5 = \frac{1}{-2(b+m)}(c\omega - B_1)$$

dengan

$$B_1 = \sqrt{c^2 \omega^2 - 8bc\omega m + 4b^4 + 12b^3 m - 4b^2 c \omega + 12b^2 m^2 - 4c\omega m^2 + 4bm^3}$$

Selanjutnya akan dicek nilai dari masing-masing nilai eigen yang diperoleh. Karena $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$, $\lambda_4 < 0$, dan $\lambda_5 < 0$ sehingga dapat disimpulkan bahwa titik keseimbangan E^+ stabil.

3.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Dari bentuk titik keseimbangan endemik defenisikan

$$R_0 = \frac{c\omega}{b(b+m)}$$

Sehingga jika

1. $R_0 > 1$ maka titik keseimbangan endemik stabil atau penyakit flu burung akan mewabah.
2. $R_0 < 1$ maka titik keseimbangan bebas penyakit stabil atau penyakit flu burung akan menghilang.

3.4 Simulasi Numerik Model

Simulasi dilakukan dengan meninjau keadaan endemik dan keadaan bebas penyakit, [7].

Tabel 3.1 Nilai Parameter dalam Penyebaran Penyakit Flu Burung.

No.	Parameter	Penjelasan Parameter (Satuan)	Nilai Parameter
1.	$\frac{c}{b}$	Pertambahan burung <i>susceptible</i> setiap satuan waktu. (jumlah burung/hari)	26,5
2.	$\frac{c}{b}$	Laju kematian dan emigrasi burung <i>susceptible</i> dan <i>infected</i> . (per hari)	5

3.	ω	Laju interaksi burung <i>susceptible</i> dengan burung <i>infected</i> yang dapat mengakibatkan penularan penyakit flu burung. (per (hari x jumlah burung))	2
4.	m	Laju kematian burung <i>infected</i> yang disebabkan karena penyakit flu burung. (per hari)	5
5.	$\frac{m}{\lambda}$	Pertambahan manusia <i>susceptible</i> setiap satuan waktu. (jumlah manusia/hari)	3
6.	$\frac{\lambda}{\mu}$	Laju kematian dan emigrasi manusia <i>susceptible</i> , <i>infected</i> , dan <i>recovered</i> . (per hari)	0,015
7.	β	Laju interaksi manusia <i>susceptible</i> dengan burung <i>infected</i> yang dapat mengakibatkan penularan penyakit flu burung. (per (hari x jumlah manusia))	0,2
8.	ϵ	Laju manusia <i>infected</i> yang kemudian sembuh dari penyakit flu burung dan menjadi manusia <i>recovered</i> . (per hari)	0,001

3.4.1 Keadaan Endemik Sistem

Nilai parameter pada Tabel 3.1 menghasilkan $R_0 \approx 1,06 > 1$, berarti endemik penyakit flu burung telah terjadi dalam populasi. Akan ditinjau titik keseimbangan yang diperoleh yaitu E dan E^+ .

1. $E = (5.3, 0, 200, 0, 0)$ dengan nilai eigen masing-masing adalah -5, -0.015, -0.015, -1.016, 0.6. Karena terdapat satu nilai eigen dari E yang bernilai positif maka titik keseimbangan E merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil.
2. $E^+ = (5, 0.15, 66.67, 1.97, 0.13)$ dengan nilai eigen masing-masing adalah -0.015, -1.016, -0.045, -0.644, -4.656. Karena semua nilai eigennya bernilai negatif maka titik keseimbangan E^+ merupakan titik keseimbangan yang stabil.

Dinamika model disimulasikan dengan menggunakan titik awal $(S_b(0), I_b(0), S_h(0), I_h(0), R_h(0)) = (6, 2, 80, 3, 2)$.

3.4.2 Keadaan Bebas Penyakit

Pilih $c = 20$ dan nilai parameter yang lainnya sama pada Tabel 3.1, sehingga menghasilkan $R_0 = 0,8 < 1$, berarti endemik penyakit flu burung tidak akan terjadi dan lama kelamaan penyakit akan menghilang dari populasi. Akan ditinjau titik keseimbangan yang diperoleh yaitu E dan E^+ . Karena pada titik keseimbangan E^+ bernilai negatif maka yang ditinjau hanya pada E .

$E = (4, 0, 200, 0, 0)$ dengan nilai eigen masing-masing adalah -5, -0.015, -0.015, -1.016, -2. Karena semua nilai eigen dari E bernilai negatif maka titik keseimbangan E stabil.

Dinamika model disimulasikan dengan menggunakan titik awal $(S_b(0), I_b(0), S_h(0), I_h(0), R_h(0)) = (5, 3, 225, 3, 2)$.

4. Kesimpulan

1. Model SIR untuk penyebaran penyakit flu burung memiliki dua titik keseimbangan yaitu titik keseimbangan bebas penyakit E dan titik keseimbangan endemik E^+ .
2. Titik keseimbangan E stabil jika $R_0 < 1$ sedangkan titik keseimbangan endemik E^+ stabil jika $R_0 > 1$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anton H., 1995, Aljabar Linear Elementer (Edisi ke-5) Terjemahan Pantur Silaban dan I Nyoman Susila, Erlangga, Jakarta.
- [2] Balai Karantina Kelas 1 Semarang, 2013, Sekilas Tentang Flu Burung, <http://karantinasemarang.org/inkehati-karantina-hewan>, diakses pada tanggal 16-06-2013.
- [3] Cigna, 2012, Waspada Berbagai Jenis Flu, http://www.cigna.co.id/id/html/customer_care/tips_and_advices/health_related_beware_influenza.html , diakses pada tanggal 16-06-2013.
- [4] Fred B., Carlos-Chavez C., 2000, Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, Spinger, Vancouver, B. C., Canada.
- [5] Giesecke J., 1994, Modern Infectious Disease Epidemiology, Oxford University Press, New York.
- [6] Haberman R., 1997, Mathematical Models : An Introduction to Applied Mathematics. Prentice-Hall, Inc., 1987.
- [7] Iwami S., Takeuchi Y., Liu X., 2006, Avian-Human Influenza Epidemic Model, Elsevier.
- [8] Tamrin H., 2007, Model SIR Penyakit Tidak Fatal, http://wahid.web.ugm.ac.id/download/paper/Model_SIR_Penyakit_Tidak_Fatal.pdf, diakses pada tanggal 15-03-2013.
- [9] Tu PNV, 1994, Dynamical System : An Introduction With Applications in Economics and Biology, New York: Springer-Verlag.
- [10] UCSB, 2010, Lecture 10 Disease Models, <http://www.lifesci.ucsb.edu/~latto/bubonic2.pdf>, diakses pada tanggal 25-03-2013.